Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Jaak Peterson

Binoommeetodi koonduvuse kiirendamine optsioonide hindamisel

Matemaatilise statistika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja Toomas Raus

Tartu

2019

Binoommeetodi koonduvuse kiirendamine optsioonide hindamisel

Bakalaureusetöö

Jaak Peterson

Lühikokkuvõte. Optsioon on võimalus osta või müüa alusvara kindlal ajahetkel tulevikus kindlaks määratud hinnaga. Optsioonide hinna leidmiseks kasutatakse sageli numbrilisi meetodeid, millest üks levinumaid on binoommeetod. Tavalise binoommeetodi puuduseks on aga optsiooni hinna aeglane koondumine. Käesolevas töös vaadeldakse binoommeetodi koonduvuse kiirendamist paindliku binoommeetodi ning Leisen-Reimeri meetodi abil.

CERCS teaduseriala: P160 Statistika, operatsioonianalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika.

Märksõnad: Optsioon, binoommeetod, paindlik binoommeetod, Leisen-Reimeri meetod, optsioonide hindamine.

Improving the convergence of the binomial option pricing method

Bachelor's Thesis

Jaak Peterson

Abstract. An option gives the holder of the option the right to buy or sell an asset at a certain time in the future with a fixed price. Numerical methods are often used to find the price of options, one of the most common of which is the binomial method. However, a lack of conventional binomial method is the slow convergence of the price of the option. In this thesis, we consider the flexible binomial model and the Leisen-Reimer model to improve the convergence of the binomial method.

CERCS research specialisation: P160 Statistics, operation research, programming, actuarial mathematics.

Key words. Option, binomial model, flexible binomial model, Leisen-Reimer model, option pricing

Sisukord

Sissejuhatus

Optsioon annab omanikule õiguse osta (ostuoptsioon ehk *call option*) või müüa (müügioptsioon ehk *put option*) kindlaks määratud ajal tulevikus, kindel kogus finantsvara, varem kokkulepitud hinnaga (tehinguhind ehk *strike price*). Optsioonide puhul pole optsiooni ostjal kohustust kokkulepitud tehingut teha ja sellise õiguse eest tuleb maksta, aga optsioonilepingu müüjal ehk väljakirjutajal on kohustus müüa(ostuoptsiooni korral) või osta(müügioptsiooni korral) alusvara. Üks olulisemaid teemasid optsioonide teoorias on optsiooni hinna määramine. Tavalise Euroopa tüüpi optsiooni hind on leitav analüütiliselt, kui Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi lahend, kuid keerulisemate optsioonide puhul tuleb kasutada erinevaid numbrilisi meetodeid. Üheks levinumaiks numbriliseks meetodiks optsioonide hindamisel on binoommeetod. Tavalise binoommeetodi puuduseks on aga binoommeetodil leitud hinna aeglane koondumine täpseks hinnaks. Antud bakalaureusetöö eesmärk on tutvustada kahte binoommeetodi modifikatsiooni, paindlikku binoommeetodit ja Leisen-Reimeri meetodit, mille korral optsiooni hinna koondumine täpseks hinnaks on kiirem.

Töö esimeses peatükis anname ülevaate optsioonidega seotud mõistetest. Alapeatükkides 1.3 ja 1.4 toome välja eeldused alusvara hinna käitumisele ja esitame Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi Euroopa optsiooni hinna leidmiseks. Töö teises peatükis tutvustame binoommeetodi kolme erinevat verisooni: CRR binoommeetod, paindlik binoommeetod ning Reimer ja Leiseni meetod. Vaadeldavad meetodi erinevad teineteisest peamiselt mudeli parameetrite valiku poolest ning seetõttu on erinevatel mudelitel ka erinevad omadused. Paindliku binoommeetodi korral valitakse parameetrid selliselt, et optsiooni täitmishind satuks täpselt hinnapuu sõlme. Reimer ja Leiseni meetodi korral lähtutakse parameetrite valikul tingimusest, et optsiooni täitmishind satuks hinnapuu keskele. Töö viimases osas esitame numbriliste eksperimentide tulemused. Programmid numbriliste eksperimentide jaoks on koostatud programmeerimiskeeles Python ning on toodud lisades.

1 Optsioonid, Optsiooni hind

1.1 Optsioonid

Käesoleva peatüki kirjutamisel on kasutatud materjale [1], [3] ja [6].

Optsioon on tuletisinstrument ehk derivatiiv, mis annab selle omanikule õiguse, kuid mitte kohustuse, tulevikus osta või müüa alusvara tulevikus varem kokkulepitud ajal kokkulepitud hinnaga. Alusvaraks võib olla aktsia, aktsiaindeks, tooraine, valuuta, võlakiri, intressimäär, futuurileping vms. Optsioone on kahte liiki - ostuoptsioonid ja müügioptsioonid. Ostuoptsioon(*call*) annab omanikule võimaluse tulevikus osta kokkulepitud vara kokkulepitud hinnaga, müügioptsioon(*put*) aga müüa. Kokkulepitud hinda X, millega tulevikus on võimalik optsiooni osta või müüa nimetatakse optsiooni täitmishinnaks. Optsiooni täitmisaeg on mingi kindlaks määratud kuupäev tulevikus, millal (või milleni) optsiooni omanik saab optsioonist tulenevat õigust rakendada. Kui täitmisaeg on möödunud, kaotab optsioon väärtuse. Ostuoptsiooni korral on selle omanikul võimalik teenida tulu, kui alusvara hind kasvab piisaval määral optsiooni eluaja jooksul, müügioptsiooni korral aga siis, kui alusvara hind langeb.

Sõltuvalt sellest, kas optsiooni saab realiseerida vaid täitmispäeval või kuni täitmispäevani jagatakse optsioonid Euroopa ja Ameerika optsioonideks. Euroopa optsioon annab selle omanikule õiguse osta (ostuoptsiooni korral) või müüa (müügioptsiooni korral) alusvara varem määratud hinna X eest kokkulepitud täitmisajal T. Ameerika optsioon annab optsiooni omanikule õiguse osta või müüa alusvara mistahes ajal kuni kokkulepitud täitmisajani T. Optsioone kasutatakse finantsturgudel peamiselt riskide maandamiseks ja spekuleerimiseks.

Euroopa ostuoptsiooniga seotud tulu ehk väljamakse suurus P optsiooni täitmisajal T leitakse valemiga

$$P_C = \begin{cases} S(T) - X, & \text{kui } S(T) > X \\ 0, & \text{kui } S(T) \leq X, \end{cases}$$

kus $S(T)$ on alusvara hind tätimispäeval. Kui alusvara hind $S(T)$ on suurem kui täitmishind X, siis on optsiooni omanikul kasulik osta alusvara hinnaga X ning tema tulu on alusvara hinna ja täitmishinna vahe. Kui aga alusvara hind $S(T)$ on väiksem või võrdne täitmishinnast X, siis ei ole optsiooni omanikul kasulik optsiooni realiseerida ning tema tulu täitmispäeval on null.

Euroopa müügioptsiooniga seotud tulu ehk väljamakse suurus P optsiooni täitmisajal T leitakse valemiga

$$P_P = \begin{cases} X - S(T), & \text{kui } S(T) < X \\ 0, & \text{kui } S(T) \geq X, \end{cases}$$

Tähistades

$$[x]_+ = \begin{cases} x, & \text{kui } x > 0 \\ 0, & \text{kui } x \leq 0 \end{cases},$$

saame Euroopa ostu- ja müügioptsiooni väljamaksed esitada kujul

$$P_C = [S(T) - X]_+, \qquad P_P = [X - S(T)]_+.$$

Ameerika ostu- ja müügioptsiooniga seotud väljamaksed, kui optsioon realiseeritakse ajal t, $0 < t \leq T$, on vastavalt

$$P_C = [S(t) - X]_+, \qquad P_P = [X - S(t)]_+.$$

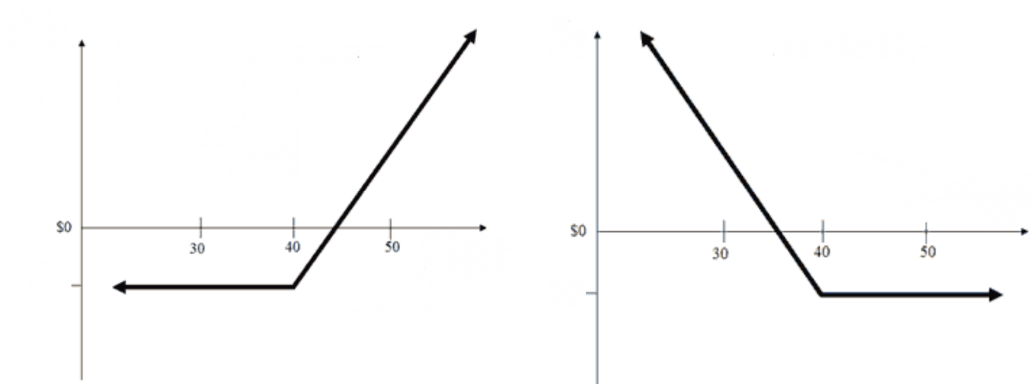
Kuna optsiooni täitmisajal on optsiooni omanikul võimalik saada tulu, kuid kunagi ei pea midagi maksma, siis on selge, et optsiooni omanik peab optsiooni omandamisel maksma optsiooni väljaandmisel mingi summa. Optsiooni hinnaks V nimetame summat, mille optsiooni ostja peab väljaandjale maksma optsiooni omandamisel.

Tähistame Euroopa tüüpi ostu- ja müügioptsiooni hinna vastavalt V_C ja V_P. Kui riskivaba pidev intressimäär on r, siis optsiooni omaniku kasum/kahjum täitmisajal T on Euroopa ostuoptsiooni korral

$$P_C - V_C e^{rT} = [S(T) - X]_+ - V_C e^{rT}$$

ning Euroopa müügioptsiooni korral

$$P_P - V_P e^{rT} = [X - S(T)]_+ - V_P e^{rT}.$$



Joonis 1: Ostu-(vasakul) ja müügioptsiooni(paremal) kasumi/kahjumi suurus sõltuvalt alusvara hinnast.

Ostu- ja müügioptsiooni kasumi/kahjumi suurus sõltuvalt alusvara hinnast juhul kui täitmishind $X = 40$, on toodud joonisel 1.

Seega ostuoptsiooni korral, mida kõrgem on alusvara hind optsiooni täitmisajal, seda suurem on optsioonist saadav tulu. Müügioptsiooni korral, mida väiksem on alusvara hind täitmisajal, seda suurem on optsioonist saadav tulu.

Optsiooni hinda mõjutavad järgmised tegurid:

- Kehtiv alusvara alghind $S(0)$, mis kehtib hetkel, kui optsioon ostetakse. Ostuoptsiooni hind on seda suurem, mida suurem on alusvara hind optsiooni ostmise hetkel. Müügioptsiooni hind on aga seda suurem, mida madalam on optsiooni hind optsiooni ostmise hetkel.

- Optsiooni täitmishind X. Kui täitmishind suureneb, siis ostuoptsiooni hind väheneb ning müügioptsiooni hind suureneb.

- Aeg optsiooni täitmisajani T. Mida pikem on optsiooni eluiga, seda kõrgem on optsiooni hind.

- Alusvara hinna volatiilsus σ. See iseloomustab alusvara hinna varieeruvust. Mida suurem on alusvara volatiilsus, seda suurem on optsiooni hind.

- Riskivaba intressimäär r. Ostuoptsiooni hind suureneb ja müügioptsiooni hind väheneb, kui intressimäär suureneb.

1.2 Ostu- ja müügioptsiooni hindade partiteetsus

Käesoleva peatüki kirjutamisel on kasutatud allikat [6].

Erinevate finantsinstrumentide hinna leidmisel on üheks eelduseks, et antud hinna korral ei tekiks finantsturul arbitraaži võimalust. Arbitraažiks ehk arbitraažistrateegiaks nimetatakse sellist strateegiat, mis võimaldab finantsturul tegutsedes mingi nullist erineva tõenäosusega saada tulu ning millega mitte ühelgi juhul ei kaasne kulusid. On selge, et kui finantsturul eksisteeriks arbitraažistrateegia, siis kõik ratsionaalsed investorid sooviks seda rakendada ning sel turul ei oleks erinevate finantstoodete nõudmine ja pakkumine enam tasakaalus. Kui alusvaraks oleva aktsia korral ei maksta dividende ning pidev riskivaba intressimäär on r, siis saab näidata, et sama täitmishinna X ja sama täitmisaja T korral on Euroopa ostu- ja müügioptsioonide hinnad seotud järgmise võrdusega

$$V_C - V_P = S(0) - Xe^{-rT}.$$

Tõestus. Oletame esmalt, et $V_C - V_P > S(0) - Xe^{-rT}$. Sellisel juhul saame arbitraažistrateegia konstrueerida järgmiselt: ajahetkel $t = 0$

- Ostame ühe alusvara aktsia hinnaga $S(0)$;
- Ostame ühe müügioptsiooni hinnaga V_P;
- Müüme (anname välja) ühe ostuoptsiooni hinnaga V_C;
- Kui $V_C - V_P - S(0) > 0$, siis hoiustame selle summa intressimääraga r, kui $V_C - V_P - S(0) < 0$, siis võtame laenu summas $V_P + S(0) - V_C$ intressimääraga r.

Nende tehingute rahaline maksumus kokku on $V_C - V_P - S(0) - (V_C - V_P - S(0)) = 0$.
Seejärel, ajahetkel $t = T$:

- Kui $V_C - V_P - S(0) > 0$, siis lõpetame hoiuse ning saame summa $(V_C - V_P - S(0))e^{rT}$;
- Kui $V_C - V_P - S(0) < 0$, siis maksame laenu tagasi summas $(V_C + S(0) - V_P)e^{rT}$;
- Kui $S(T) - X > 0$, siis jätame müügioptsiooni realiseerimata, müüme alusvara aktsia hinnaga $S(T)$ ning maksame välja ostuoptsiooniga seotud väljamakse $S(T) - X$.

Kokkuvõttes on nende tehingute summa

$$(V_C - V_P - S(0))e^{rT} + S(T) - (S(T) - X) = (V_C - V_P - S(0))e^{rT} + X > 0,$$

mis näitab, et selline strateegia on arbitraažistrateegia.

- Kui aga $S(T) - X < 0$, siis realiseerime müügioptsiooni ning saame summa $X - S(T)$, müüme alusvara aktsia hinnaga $S(T)$ ning ostuoptsiooniga seotud kulud on 0.

Kokkuvõttes on nende tehingute summa

$$(V_C - V_P - S(0))e^{rT} + (X - S(T)) + S(T) = (V_C - V_P - S(0))e^{rT} + X > 0,$$

mis näitab jällegi, et selline strateegia on arbitraažistrateegia.

Oletame nüüd, et $V_C - V_P < S(0) - X_e^{-rT}$ ning näitame, et ka siis eksisteerib arbitraažistrateegia. Hetkel $t = 0$:

- Müüme ühe alusvara aktsia hinnaga $S(0)$;
- Ostame ühe ostuoptsiooni hinnaga V_C;
- Müüme (anname välja) ühe müügioptsiooni hinnaga V_P;
- Kui $V_P - V_C - S(0) > 0$, siis hoiustame selle summa intressimääraga r, kui $V_P - V_C - S(0) < 0$, siis võtame laenu summas $V_C + S(0) - V_C$ intressimääraga r.

Nende tehingute rahaline maksumus kokku on $V_P - V_C - S(0) - (V_P - V_C - S(0)) = 0$.
Seejärel, ajahetkel $t = T$:

- Kui $V_P - V_C - S(0) > 0$ siis lõpetame hoiuse ning saame summa $V_P - V_C - S(0)e^{rT}$;
- Kui $V_P - V_C - S(0) < 0$ siis maksame laenu tagasi summas $(V_P + S(0) - V_C)e^{rT}$;
- Kui $S(T) - X \geq 0$, siis realiseerime ostuoptsiooni ja ning saame summa $S(T) - X$, ostame alusvara aktsia hinnaga $S(T)$ ning müügioptsiooniga seotud kulud on 0.

Kokkuvõttes on tegevuste summa

$$(V_P + S(0) - V_C)e^{rT} - S(T) + (S(T) - X) = (V_P + S(0) - V_C)e^{rT} - X > 0,$$

mis näitab, et selline strateegia on arbitraažistrateegia.

- Kui $S(T) - X < 0$, siis jätame ostuoptsiooni realiseerimata, ostame alusvara aktsia hinnaga $S(T)$ ning maksame välja müügioptsiooniga seotud kulud $X - S(T)$.

Kokkuvõttes on tegevuste summa

$$(V_P + S(0) - V_C)e^{rT} - S(T) - (X - S(T)) = (V_P + S(0) - V_C)e^{rT} - X > 0,$$

mis näitab taas, et selline strateegia on arbitraažistrateegia. □

Ameerika optsioonide korral analoogilist ühest seost ostu- ja müügioptsiooni vahel ei ole. Ameerika optsiooni korral saab näidata, et kui alusvaraks oleva aktsia korral ei maksta dividende, siis sama täitmishinna X ja sama täitmisaja T korral saab Ameerika ostu- ja müügioptsioonide hindade vahet hinnata järgmiste võrratustega

$$S(0) - X \leq V_{AC} - V_{AP} \leq S(0) - Xe^{-rT},$$

kus V_{AC} ja V_{AP} on vastavalt Ameerika ostu- ja müügioptsioonide hinnad.

1.3 Eeldused alusvara hinna käitumisele

Käesoleva peatüki kirjutamisel on kasutatud materjale [1] , [2] ja [3].

Eelnevas punktis toodud seosed võimaldavad leida Euroopa ostuoptsiooni hinda kui on teada müügioptsiooni hind ja vastupidi, kuid selleks, et määrata neist ühe hinda, tuleb teha eeldused alusvara hinna käitumisele. Finantsturgude uurimisel eeldatakse, et kehtib efektiivse turu hüpotees, mis väidab peamiselt kahte asja:

- Minevik kajastab täielikult käesolevat hinda, aga ei hõlma endas edasist informatsiooni. Alusvara hinna ajalugu kajastub täielikult alusvara hetkehinnas.

- Turud reageerivad koheselt igasugusele uuele informatsioonile alusvara hinna kohta.

Aktsiate hindade empiiriline uurimine on näidanud, et aktsia hinna käitumist saab kirjeldada võrrandiga

$$\log(S(t)) = \log(S(t-1)) + \mu + \varepsilon_t, \tag{1.1}$$

kus $t = 1, 2, ...$ suurus μ on konstant ning ε_t on sõltumatud identsed normaaljaotusega $N(0, \sigma^2)$ juhuslikud suurused. See tähendab, et $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ ning $corr(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, kui $t \neq s$. Seega logaritmitud aktsiahind mingil päeval on võrdne eelmise päeva logaritmitud aktsiahinnaga pluss mingi konstant μ pluss juhuslik hälve ε_t. Suurust $\log S_t - \log S_{t-1}$ defineeritakse ka aktsia pideva tulumäärana perioodil $[t-1, t]$. Kui aktsiahinna muutus on võrreldes aktsia hinnaga väike, siis aktsia pidev tulumäär on ligikaudselt võrdne aktsia tavalise tulumääraga perioodil $[t-1, t]$.

$$\log(S(t)) - \log(S(t-1)) = \log\left(\frac{(S(t) - S(t-1))}{S(t-1)} + 1\right) \approx \frac{S(t) - S(t-1)}{S(t-1)}.$$

Kui alusvara hinda vaadeldakse pideva ajast sõltuva funktsioonina, siis eeldame, et alusvara hind käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t), \tag{1.2}$$

kus suurus μ on alusvara oodatav tulusus ajaühiku kohta. Seega suurus μdt kirjeldab ennustatavat tulu. Suurus σ on alusvara hinna tulususe standardhälve, mis iseloomustab alusvara hinna käitumise volatiilsust. Suurust $W(t)$ nimetatakse Wieneri protsessiks, mis defineeritakse järgmiselt:

- $W(0) = 0$ tõenäosusega 1.
- Wieneri protsessi mittelõikuvad juurdekasvud on sõltumatud, s.t. juhuslikud suurused $W(t+u) - W(t)$ ja $W(s+v) - W(s)$ on sõltumatud, kui $[t, t+u] \cap [s, s+v] = \varnothing$
- Wieneri protsessi juurdekasvud $W(t+u) - W(t)$ on normaaljaotusega juhuslikud suurused keskväärtusega 0 ning dispersiooniga $u : W(t+u) - W(t) \sim N(0, u)$
- Wieneri protsess W(t) on pidev aja t järgi tõenäosusega 1.

1.4 Black-Scholesi diferentsiaalvõrrand

Käesoleva peatüki kirjutamisel on kasutatud allikat [2].

Aastal 1973 töötasid Fisher Black ja Myron Scholes välja Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi optsiooni hinna leidmiseks. Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi tuletamisel tehakse järgmised eeldused:

- Alusvara hind käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile (1.2).
- Lubatud on lühikese positsiooni võtmine turul (s.t on võimalus müüa laenatud aktsiat ning hiljem selle aktsia tagasiostmine ning omanikule tagastamine).
- Riskivaba intressimäär r ja vara volatiilsus σ on ajast sõltuvad funktsioonid, mis on optsiooni väljastamisel teada kogu optsiooni eluea ajaks.
- Aktsia ostu-müügiga seotud tehingukulud puuduvad.
- Alusvara eest ei maksta dividende terve optsiooni eluea jooksul.
- Alusvaraga kauplemisel puudub arbitraaži võimalus. See tähendab, et alusvaraga kaubeldes ei ole võimalik teenida riskivabalt suuremat tulu raha riskivabal paigutamisel panka või ostes valitsuse võlakirju.
- Väärtpaberitega kauplemine toimub pidevalt.

Sellistel eeldustel on võimalik tõestada, et optsiooni hind $V = V(S(t), t)$ rahuldab järgmist teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandit:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Selleks et vaadeldaval diferentsiaalvõrrandil oleks ühene lahend, tuleb ette anda rajatingimused. Euroopa optsiooni korral teame, et optsiooni hind täitmispäeval T on võrdne optsiooniga seotud maksega

$$V_C(S(T), T) = \max(S(T) - X, 0).$$

Kui aga $S(t) = 0$ mingil ajahetkel t, $0 \leq t \leq T$, siis optsiooni hind on null:

$$V_C(0,t) = 0.$$

Kui aga $S(t) \to \infty$, siis optsiooni hind on sama suurusjärku alusvara hinnaga:

$$V_C(S(t),t) \sim S, \text{kui } S(t) \to \infty.$$

Müügioptsiooni korral on rajatingimusteks

$$V_P(S(T),T) = \max(X - S(T), 0),$$

$$V_P(0,t) = Xe^{-r(T-t)},$$

$$V_P(S(t),t) \to 0, \text{kui } S(t) \to \infty.$$

Kui riskivaba intressimäär ja alusvara volatiilsus on ajast sõltuvad funktsioonid: $r = r(t)$, $\sigma = \sigma(t)$, siis Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi lahendi saab Euroopa optsioonide korral analüütiliselt välja kirjutada ning ostuoptsiooni hind hetkel $t = 0$ on leitav valemiga

$$V_C(0) = V_C(S(0),0) = S(0)N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2), \tag{1.3}$$

kus

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

on standardiseeritud normaaljaotuse N(0,1) tihedusfunktsioon ning suurused d_1 ja d_2 avalduvad võrdustega

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S(0)}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{1.4}$$

$$d_2 = \frac{\log(\frac{S(0)}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{1.5}$$

Euroopa müügioptsiooni hind on leitav valemiga

$$V_P(0) = V_P(S(0),0) = Xe^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1). \tag{1.6}$$

Analüütiliselt saab optsiooni hinna Black-Scholesi võrrandi lahendina leida vaid Euroopa tüüpi optsiooni korral, mistõttu tuleb keerulisemate optsioonide hindamiseks kasutada erinevaid numbrilisi meetodeid.

2 Binoommeetod ja selle koonduvuse kiirendamine

2.1 CRR binoommeetod

Käesoleva peatüki kirjutamisel on kasutatud materjale [1] ja [3].

Binoommeetod on numbriline meetod optsioonide hindamiseks, mille esmakordselt avaldasid Cox, Ross ja Rubinstein aastal 1979. Autorite nimedest tulenevalt on binoommeetod tuntud ka kui CRR meetod. Esitame binoommeetodi idee Euroopa optsiooni hinna leidmiseks.

Olgu optsiooni eluiga $[0, T]$ ning olgu S_0 alusvara hind hetkel $t = 0$. Jagame optsiooni eluea N võrdseks osaks ja tähistame $\Delta t = \frac{T}{N}$. Paneme tähele, et kui alusvara hind ajahetkel $n\Delta t$ on S_n, siis ajahetkel $(n+1)\Delta t$ saab alusvara hind liikuda üles ja omandada väärtus uS_n või liikuda alla ja omandada väärtus dS_n, kus $u > 1$ ning $0 < d < 1$. Olgu ülesliikumise tõenäosus p, siis alla liikumise tõenäosus on *1-p*. Seega

$$S_{n+1} = \begin{cases} uS_n, & \text{tõenäosusega } p \\ dS_n, & \text{tõenäosusega } 1-p. \end{cases}$$

Olgu ajahetkel $t = 0$ alusvara hind S_0. Esimesel ajahetkel Δt on kaks võimalikku hinda uS_0 ja dS_0. Teisel ajahetkel $2\Delta t$ on 3 võimalikku vara hinda u^2S_0, d^2S_0 ja udS_0. Kolmandal ajahetkel $3\Delta t$ on seega neli võimalikku vara hinda u^3S_0, u^2dS_0 ja ud^2S_0 ja d^3S_0. Seega ajahetkel n saab alusvara hind omada $n+1$ võimalikku väärtust

$$u^j d^{n-j} S_0, j = 0, 1, ..., n.$$

Uurime nüüd, kuidas määrata binoommeetodi parameetreid u, d, ja p. Selleks eeldame, et alusvara hind käitub lognormaalse jaotusega juhusliku ekslemisena vastavalt valemile (1.1). Kuna arbitraaživabas mudelis on juhusliku rahavoo $X(t_2)$ hind hetkel $t_1 < t_2$ võrdne selle rahavoo keskväärtuse diskonteeritud väärtusega, s.t.

$$V_{X(t_1)} = e^{-r(t2-t1)}\mathrm{E}[X(t2)],$$

siis peab kehtima võrdus

$$S_m e^{r\Delta t} = \mathrm{E}[S_{m+1}] = S_m(pu + (1-p)d), \tag{2.1}$$

millest saame, et

$$pu + (1-p)d = e^{r\Delta t}. \tag{2.2}$$

Alusvara hinna dispersioon on võrdeline ajaga $\mathrm{Var}(S_{m+1}) = S_m^2\sigma^2\Delta t$, kus σ on volatiilsus. Seega

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[S_{m+1}] &= \mathrm{E}[(S_{m+1})^2] - (\mathrm{E}[S_{m+1}])^2 = \\ &= S_m^2(pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Kasutades võrdusi (2.2) ja (2.3) saame, et

$$S_m^2\sigma^2\Delta t = S_m^2\big(pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2\big) = S_m^2\big(pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2r\Delta t}\big). \tag{2.4}$$

Kokkuvõttes oleme saanud kaks võrrandit kolme tundmatu p, u ja d määramiseks

$$pu + (1-p)d = e^{r\Delta t}, \tag{2.5}$$

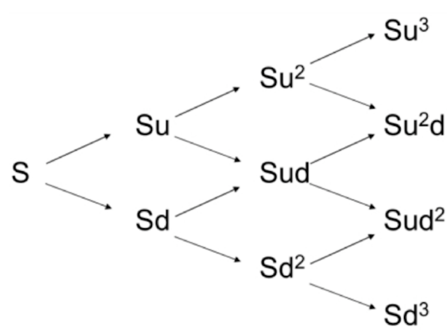
$$pu^2 + (1-p)d^2 = \sigma^2\Delta t + e^{2r\Delta t} \tag{2.6}$$

ning valemist (2.5) saame tundmatu p jaoks valemi

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{2.7}$$

Selleks, et üheselt määrata parameetreid p, u ja d lisame veel ühe täiendava tingimuse

$$d = \frac{1}{u}.$$



Joonis 2: Alusvara hinnapuu binoommeetodi korral.

Seesugune lisatingimus annab meile tasakaalustatud hinnapuu, kus peale üht sammu üles ja üht sammu alla on alusvara väärtus sama mis alguses. Kuna $d = \frac{1}{u}$ korra saame

$$pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 = p(u^2 - d^2) + d^2 - e^{2r\Delta t} =$$
$$(pu + (1-p)d - d)(u + d) + d^2 - e^{2r\Delta t} = (e^{r\Delta t} - d)(u + d) + d^2 - e^{2r\Delta t} =$$
$$e^{r\Delta t}(u + u^{-1}) - 1 - e^{2r\Delta t},$$

siis saame võrrandi (2.4) kirjutada kujul

$$e^{r\Delta t}(u + u^{-1}) - 1 - e^{2r\Delta t} = \sigma^2 \Delta t. \tag{2.8}$$

Näitame, et selle võrrandi ligikaudne lahend täpsusega $o(\Delta t)$ on $u = e^{\sqrt{\Delta t}}$. Selleks kasutame Taylori valemit. Taylori valemi põhjal saame

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t} &= 1 + r\Delta t + o(\Delta t), \\ u = e^{\sigma\Delta t} &= 1 + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2} + o(\Delta t), \\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} &= 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2} + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Nüüd saame

$$e^{r\Delta t}(u + u^{-1}) - 1 - e^{2r\Delta t}$$
$$= (1 + r\Delta t + o(\Delta t))(2 + \sigma^2 \Delta t + o(\Delta t)) - 1 - 1 - 2r\Delta t + o(\Delta t)$$
$$= 2 + 2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t + o(\Delta t) - 2 - 2r\Delta + o(\Delta t)$$
$$= \sigma^2 \Delta t + o(\Delta t).$$

Kokkuvõttes oleme saanud binoommeetodi parameetrid u, d ja p kujul

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Olgu $V_{m,j}$ optsiooni hind hetkel $m\Delta t$ ning alusvara hinna $u^j d^{m-j} S$ korral. Optsiooni hind hetkel $T = N\Delta t$ on võrdne optsiooniga seotud väljamaksega, s.t.

$$V_{N,j} = P_{N,j} = \begin{cases} \max\left\{u^j d^{N-j} S - X, 0\right\}, & \text{ostuoptsiooni korral} \\ \max\left\{X - u^j d^{N-j} S, 0\right\} & \text{müügioptsiooni korral.} \end{cases}$$

Teades optsiooni hinda hetkel T, on võimalik leida Euroopa optsiooni hinda rekursiivselt ajas tagant ettepoole liikudes vastavalt valemile

$$V_{m,j} = e^{-r\Delta t}\big(pV_{m+1,j+1} + (1-p)V_{m+1,j}\big), 0 \leq j \leq m, m = N-1, N-2, ..., 0.$$

Optsiooni hind $V_{0,0}$ ongi optsiooni hind hetkel $t = 0$.
Ameerika optsiooni hinna saame leida vastavalt valemitele:

$$V_{m,j} = \max\left\{P_{m,j}, e^{-r\Delta t}(pV_{m+1,j+1} + (1-p)V_{m+1,j})\right\}, 0 \leq j \leq m, m = N-1, N-2, ..., 0,$$

kus

$$P_{m,j} = \begin{cases} \max\{u^j d^{m-j} S_0 - X, 0\} & \text{ostuoptsiooni korral} \\ \max\{X - u^j d^{m-j} S_0, 0\} & \text{müügioptsiooni korral.} \end{cases}$$

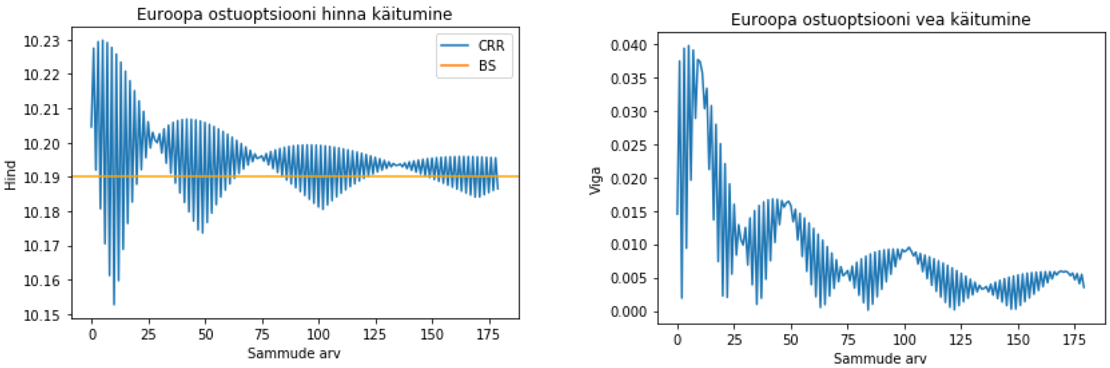
Eespool leitud parameetrid u, d ja p on ainult üheks võimaluseks binoommeetodi parameetrite määramiseks. Saab näidata, et kui valida binoommudeli parameetrid selliselt, et oleks täidetud tingimus (2.2) ning tingimus

$$\frac{\mathrm{Var}(S_{m+1})}{S_m^2} = \sigma^2 \Delta t + o(\Delta t), \tag{2.9}$$

siis binoommeetodil leitud Euroopa ostu- ja müügioptsiooni hinnad koonduvad vastavalt Black-Scholes'i valemitega (1.3) ja (1.6) saadud piirhindadeks. Näiteks võime binoommudeli parameetrid u ja d valida ka vastavalt Jarrow-Rudd'i valemitele:

$$u = e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}},$$
$$d = e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Nii CRR kui Jarrow-Rudd parameetritega määratud binoommeetodi puuduseks on see, et binoommeetodiga leitud hinna koondumine ei ole ühtlane, s.t viga $|V_B(N) - V_{BS}|$, kus $V_B(N)$ ja V_{BS} on vastavalt binoommeetodil ja Black-Scholes'i valemiga leitud hind, ei kahane monotoonselt N kasvades ning koondumise kiirus on aeglane - suurusjärku $\frac{1}{N}$. Joonisel 3 on toodud binoommeetodil(CRR parameetritega) leitud Euroopa ostuoptsiooni hind ja Black-Scholes'i valemiga leitud hind juhul kui $10 \leq N \leq 20$, $X = 95$, $S_0 = 100$, $T = 0.5$, $r = 0.06$ ja $\sigma = 0.2$.



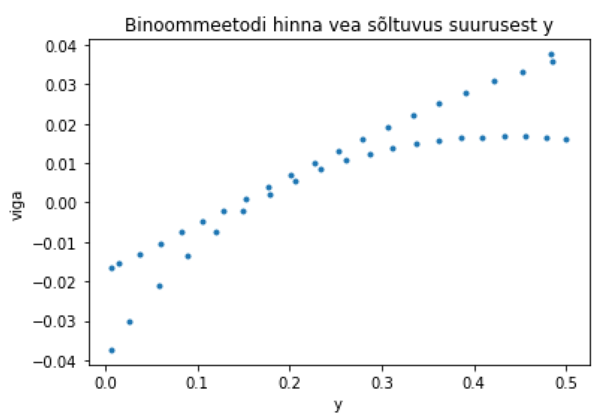
Joonis 3: Euroopa ostuoptsiooni hinna ja vea käitumine.

Binoommeetodil leitud hinna ostsilleeruvuse põhjuseks on asjaolu, et täitmishinna asukoht hinnapuu väärtuste $S_0 u^j d^{N-j}$, $0 \leq j \leq N$ suhtes ei ole fikseeritud. Tähistame $S(N, j) = S_0 u^j d^{N-j}$, $0 \leq j \leq N$ ning olgu j_0 indeks, mille korral kehtivad võrratused

$$S(N, j) < X \leq S(N, j+1).$$

Defineerime suuruse y_N kui täitmishinna X suhtelise kauguse hinnapuu lähimast sõlmest valemiga

$$y_N = \frac{\min\{X - S_{N,j_0}, S(N, j_0 + 1) - X\}}{S_{N,j_0+1} - S_{N,j_0}}.$$



Joonis 4: Binoommeetodi hinna vea sõltuvus suurusest y_N.

Joonisel 4 on toodud binoommeetodi hinna vea $V_B(N) - V_{BS}$ sõltuvus suurusest y_N juhul, kui $27 \leq N \leq 74$. Näeme, et viga $V_B(N) - V_{BS}$ sõltub täitmishinna suhtelisest kaugusest hinnapuu lähimast sõlmest.

2.2 Paindlik binoommeetod

Käesoleva peatüki kirjutamisel on kasutatud allikat [4].

Keerukamate optsioonide hindamiseks on binoommeetod suhteliselt ressursinõudlik. Seda seetõttu, et optsiooni hinna koondumine on aeglane ja täpsema hinna saamiseks on vajalik ajaperioodide arv suur. Paindlik binoommeetod (kirjanduses nimetatud autori järgi ka Tiani mudeliks) on tavalise binoommeetodi modifikatsioon kuhu on lisatud nn. "sabaparameeter", mis muudab hinnapuu kuju ja ulatust. Konstrueerimaks panidlikku binoommeetodit kasutame parameetrite u ja d valikuks valemeid:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t}, \tag{2.10}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t}, \tag{2.11}$$

kus λ on vabalt valitud konstant ehk "sabaparameeter", mis võib olla nii positiivne, negatiivne kui ka 0. Näitame, et kui valida u ja d vastavalt valemitele (2.10) ja (2.11), siis on binoommeetodi koonduvuse tingimus (2.9) täidetud. Valemite (2.6) ja (2.9) põhjal saame

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{Var}(S_{m+1})}{S_m^2} = pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2r\Delta t} = \\
&= p(u^2 - d^2) + d^2 - e^{2r\Delta t} = \\
&= (e^{r\Delta t} - d)(u + d) + d^2 - e^{2r\Delta t} = \\
&= e^{r\Delta t}(u + d) - du - e^{2r\Delta t}.
\end{aligned}$$

Kuna $ud = e^{2\lambda\sigma^2\Delta t}$ ning Taylori valemi põhjal

$$\begin{aligned}
u &= 1 + \sigma^2\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t + \frac{\sigma^2\Delta t}{2} + o(\Delta t), \\
d &= 1 - \sigma^2\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t + \frac{\sigma^2\Delta t}{2} + o(\Delta t), \\
ud &= 1 + 2\lambda\sigma^2\Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

siis

$$
\begin{aligned}
&e^{r\Delta t}(u+d) - du - e^{2r\Delta t} = \\
&(1 + r\Delta t + o(\Delta t)(2 + \sigma^2\Delta t + 2\lambda\sigma^2\Delta t + o(\Delta t)) \\
&- (1 + 2\lambda\sigma^2\Delta t + o(\Delta t)) - (1 + 2r\Delta t + o(\Delta t)) = \\
&= \sigma^2\Delta t + o(\Delta t).
\end{aligned}
$$

Seega tingimus (2.9) on täidetud. Veendume ka, et valemitega (2.10) ja (2.11) antud parameetrite u ja d korral oleks garanteeritud, et riskineutraalne tõenäosus $\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}$ oleks positiivne. Lihtne on veenduda, et kui

$$d < e^{r\Delta t} < u, \tag{2.12}$$

siis $0 < p < 1$.

Võrratus (2.12) on samaväärne võrratusega

$$-\sigma\sqrt{\Delta t} < (r - \lambda\sigma^2)\Delta t < \sigma\sqrt{\Delta t},$$

mis omakorda on samaväärne võrratusega

$$|\lambda - \frac{r}{\sigma^2}| < \frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Viimane võrratus kehtib kui λ on lõplik ning Δt on küllalt väike.

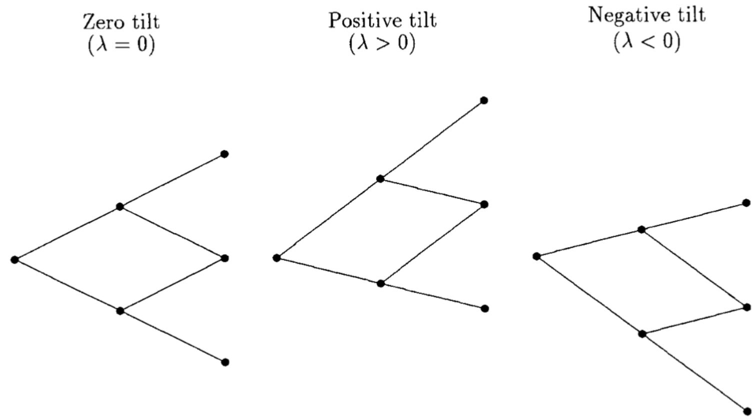
Paindliku binoommeetodi korral valitakse parameetrid u ja d nii, et binoommeetodi viga koonduks monotoonselt ning see võimaldab kasutada ekstrapoleerimisvõtet täpsema optsiooni hinna leidmiseks. Lihtne on märgata, et kui $\lambda = 0$, siis on tegemist CRR binoommudeliga, mida vaatasime eelmises punktis. Teisisõnu $\lambda = 0$ korral saame parameetrid u, d ja p järgmiselt:

$$u_0 = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

$$d_0 = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

$$p_0 = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - d_0}{u_0 - d_0}.$$

Seega on paindliku binoommeetodi korral tegemist binoommeetodi üldistusega.



Joonis 5: Alusvara hinnapuu erinevate λ väärtuste korral.

Joonisel 5 on toodud alusvara hinnapuu kuju erinevate λ väärtuste korral. Kui $\lambda > 0$, siis on binoompuu kaldus ülespoole, mis tähendab, et liikudes üles parameetri u võrra ja seejärel alla parameetri d võrra on alusvara väärtus suurem kui enne neid tegevusi. Kui $\lambda < 0$, siis on binoompuu kaldus allapoole.

Olgu ajahetkede arvuks N. Ajaperioodil $N\Delta t$ saab alusvara hind omada väärtusi

$$S(N,j) = S_0 u^j d^{N-j}, 0 \leq j \leq N.$$

Olgu λ väärtus kõigepealt

$$\lambda_0 = 0.$$

Läimat sõlme (N, j_0) täitmishinnale X saab leida kui lahendada võrrand

$$S_0 u_0^{\eta} d_0^{N-\eta} = X. \tag{2.13}$$

Avaldades viimasest võrrandist suuruse η saame:

$$\eta = \frac{\log(X/S_0) - N\log(d_0)}{\log(u_0/d_0)}.$$

Kuna võrrandi parem pool ei ole üldiselt täisarv, siis leiame lähima sõlme (N, j_0) täitmishinnale X kui

$$j_0 = \left[\frac{\log(X/S_0) - N\log(d_0)}{\log(u_0/d_0)}\right],$$

kus $[x]$ tähistab lähimat täisarvu argumendile x. Selleks, et sõlm (N, j_0) langeks kokku täpselt täitmishinnaga X, valitakse λ väärtus nii, et kehtiks:

$$S_0 u^{j_0} d^{N-j_0} = X. \tag{2.14}$$

Ehk

$$\begin{aligned}
\frac{X}{S_0} &= \exp((\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t)j_0)\exp((-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t))(N - j_0)) \\
&= \exp(j_0\sigma\sqrt{\Delta t} + j_0\lambda\sigma^2\Delta t - N\sigma\sqrt{\Delta t} + j_0\sigma\sqrt{\Delta t} + N\lambda\sigma^2\Delta t - j_0\lambda\sigma^2\Delta t) \\
&= \exp(\sigma\sqrt{\Delta t}(2j_0 - N) + N\lambda\sigma^2\Delta t).
\end{aligned}$$

Lahendades võrrandi λ suhtes saame

$$\lambda = \frac{\log(X/S_0) - (2j_0 - N)\sigma\sqrt{\Delta t}}{N\sigma^2\Delta t}.$$

Niisuguse λ valiku korral asub optsiooni täitmishind selle täitmishetkel sõlmes (N, j_0). Paneme tähele, et λ väärtus muutub sammude arvu N muutudes, kuid kuna λ väärtus jääb lõplikuks, siis on binoommeetodi koonduvus endiselt garanteeritud. Suuruse λ saab leida ka valemite (2.13) ja (2.14) põhjal. Kuna

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{S_0 u_0^{\eta} d_0^{N-\eta}}{S_0 u^{j_0} d^{N-j_0}} = \frac{\exp(2\eta\sigma\sqrt{\Delta t} - N\sigma\sqrt{\Delta t})}{\exp(2j_0\sigma\sqrt{\Delta t} - N\sigma\sqrt{\Delta t} + N\lambda\sigma^2\Delta t)} = \\
&= \exp(2\eta\sigma\sqrt{\Delta t} - 2j_0\sigma\sqrt{\Delta t} - N\lambda\sigma^2\Delta t),
\end{aligned}$$

millest saame, et

$$2\eta\sigma\sqrt{\Delta t} - 2j_0\sigma\sqrt{\Delta t} - N\lambda\sigma^2\Delta t = 0$$

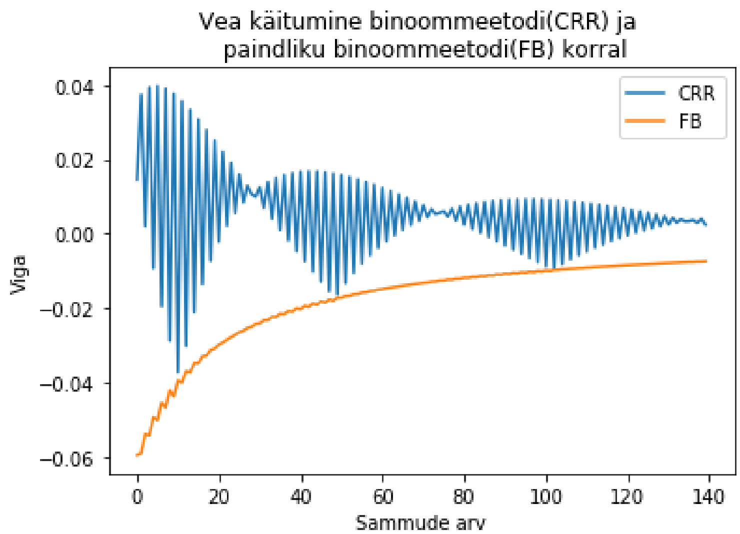
ehk

$$\lambda = \frac{2(\eta - j_0)\sqrt{\Delta t}}{\sigma T}.$$

Oluline erinevus kahe eelneva meetodi vahel on koonduvuse ühtlus. Erinevalt tavalisest binoommeetodist koondub paindliku binoommeetodi abil leitud alusvara hinna viga monotoonselt(Vt. joonis 6). Vea monotoonsuse omadus annab võimaluse suurendada koonduvuskiirust kasutades selleks ekstrapoleerimisvõtet.

Olgu $e(N)$ hindamisviga N-sammulise binoommeetodi korral:

$$e(N) = V(N) - V_{BS}, \tag{2.15}$$



Joonis 6: Vea käitumine binoommeetodi ja paindliku binoommeetodi korral.

kus $V(N)$ on binoommeetodi abil leitud hind ja V_{BS} on Black-Scholesi valemi abil leitud hind. Kuna Euroopa optsiooni korral on optsiooni hind analüütiliselt leitav, siis on ka binoommeetodi hindamisviga otseselt mõõdetav. Defineerime vigade suhte $\rho(N)$ järgmiselt:

$$\rho(N) = \frac{e(N)}{e(2N)}.$$

See iseloomustab, mitu korda kasvab binoommeetodil leitud hinna täpsus, kui suurendada ajahetkede arvu 2 korda. Kui täpsus paraneb, siis $\rho(N) > 1$. Kuna $\rho(N)$ on esitletav kujul

$$\rho(N) = \frac{V(N) - V_{BS}}{V(2N) - V_{BS}},$$

siis viimasest võrdusest saame, et

$$V_{BS} = \frac{\rho(N)V(2N) - V(N)}{\rho(N) - 1}. \tag{2.16}$$

kui vigade suhe $\rho(N)$ koondub konstandiks $\rho > 1$ juhul $N \to \infty$, siis saame leida ekstrapoleeritud hinna vastavalt valemile

$$\widehat{V}(2N) = \frac{\rho V(2N) - V(N)}{\rho - 1}. \tag{2.17}$$

Näiteks, kui $\rho = 2$, nagu paindliku binoommeetodi korral, siis ekstrapoleeritud hind on

$$\widehat{V}(2N) = 2V(2N) - V(N). \tag{2.18}$$

Leiame nüüd ekstrapoleeritud hinna vea. Kasutades seoseid (2.15) ja (2.16) saame

$$\begin{aligned}
\widehat{V}(2N) &= \frac{\rho V(2N) - V(N)}{\rho - 1} = \\
&= \frac{\rho(N)V(2N) - V(N)}{\rho - 1} + \frac{V(2N)(\rho - \rho(N))}{\rho - 1} = \\
&= V_{BS}\frac{\rho(N) - 1}{\rho - 1} + \frac{(V_{BS} + e(2N))(\rho - \rho(N))}{\rho - 1} = \\
&= V_{BS} + \frac{\rho - \rho(N)}{\rho - 1} e(2N).
\end{aligned}$$

Seega ekstrapoleeritud hinna viga on

$$\Big|\frac{\rho - \rho(N)}{\rho - 1} e(2N)\Big|,$$

mis on väiksem kui $e(2N)$, kuna $\left|\frac{\rho-\rho(N)}{\rho-1}\right| < 1$. Kui vigade suhe $\rho(N)$ koondub konstandiks $\rho > 1$, siis ekstrapoleerimismeetodit kasutades leitud hindamisviga on palju väiksem kui binoommeetodil leitud hindamisviga $e(2N)$. Seega, kui vea koonduvus on ühtlane, saab niisugust ekstrapoleerimistehnikat kasutades koonduvuskiirust suurendada.

Ameerika optsioonide korral ei saa ekstrapoleeritud hinna valemit analoogiliselt tuletada, kuna optsiooni hind ei ole analüütiliselt leitav. Selle asemel saame defineerida suuruse $\varepsilon(N)$, mis näitab kui palju muutub hind, kui suurendada ajahetkede arvu kaks korda:

$$\varepsilon(N) = V(N) - V(2N).$$

Nüüd saame defineerida vigade erinevuste suhte:

$$\rho'(2N) = \frac{\varepsilon(N)}{\varepsilon(2N)} = \frac{V(N) - V(2N)}{V(2N) - V(4N)}.$$

Näitame nüüd, et suurus $\rho'(2N)$ on esitatav kujul

$$\rho'(2N) = \frac{\rho(N) - 1}{\rho(2N) - 1}\rho(2N).$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned}
\frac{\rho(N) - 1}{\rho(2N) - 1}\rho(2N) &= \frac{\frac{e(N)}{2N} - 1}{\frac{e(2N)}{e(4N)}} \frac{e(2N)}{e(4N)} = \\
&= \frac{e(N) - e(2N)}{e(2N) - e(4N)} = \frac{V(N) - V(2N)}{V(2N) - V(4N)}.
\end{aligned}$$

See tähendab seda, et kui vigade suhe $\rho(N)$ koondub konstandiks, siis ka vigade erinevuste suhe $\rho'(N)$ koondub samaks konstandiks. Veel enam, kui vigade erinevuste suhe koondub konstandiks, siis saame koondumise kiiruse parandamiseks kasutada valemiga(2.17) toodud ekstrapoleerimisvõtet.

2.3 Leiseni ja Reimeri meetod

Käesoleva peatüki kirjutamisel on kasutatud materjale [2] ja [5].

Alternatiivse võimaluse binoommeetodi parameetrite määramiseks pakkusid välja Dietmar Leisen ja Mathias Reimer. Meetod tugineb ideele, et parameetrid u ja d tuleb valida selliselt, et optsiooni täitmishind oleks hinnapuu suhtes fikseeritud. Täitmishinna juhuslik asukoht puu suhtes on ka põhjuseks, miks CRR binoommeetodi korral optsiooni hind sedavõrd palju ostsilleerub.

Selleks, et paremini mõista Leisen-Reimer'i meetodi ideed, tuletame esmalt Euroopa optsiooni hinna valemi kasutades binoomjaotuse jaotusfunktsiooni. Vaatleme veelkord N-perioodilist binoommudelit. n-nda perioodi lõpuks saab alusvara väärtus omandada ühe väärtustest $S_0u^jd^{n-j}$, $0 \leq j \leq n$. Alusvara hind omandab väärtuse $S_0u^jd^{n-j}$ juhul, kui hind liigub üles j perioodi jooksul ning alla ülejäänud $n-j$ perioodi jooksul. Erinevaid võimalusi selleks on $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ tükki. Seega tõenäosus, et alusvara hind omandab väärtuse $S_0u^jd^{n-j}$ on $C_n^jq^j(1-q)^{n-j}$, $0 \leq j \leq n$, kus $q = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}$ on riskineutraalne tõenäosus. Paneme tähele, et tõenäosused $C_n^jq^j(1-q)^{n-j}$ on binoomjaotuse tõenäosused, mis näitab tõenäosust, et sündmus A toimub j korda, kui sündmuse A toimumise tõenäosus on q ning toimub n sõltumatut katset. Seega, kui juhuslik suurus X on binoomjaotusega, siis

$$P_{B(n,q)}(X = j) = C_n^jq^j(1-q)^{n-j},$$

ning suuruse X jaotusfunktsioon on kujul

$$F_{B(n,q)}(X = a) = P_{B(n,q)}(X < a) = \sum_{j=0}^{a-1} C_n^jq^j(1-q)^{n-j}.$$

Euroopa tüüpi ostuoptsiooni korral on optsiooniga seotud väljamakse $P_C = [S(T) - X]_+$ ning seega optsiooni hind hetkel $t = 0$ on

$$V_{C,0} = e^{-rT} \sum_{j=0}^{N} C_N^j q^j (1-q)^{N-j} [S_0 u^j d^{N-j} - X]_+.$$

Paneme tähele, et $u^j d^{N-j} = (\frac{u}{d})^j d^N$ kasvab indeksi j kasvades, sest $\frac{u}{d} > 1$.
Olgu $a \geq 0$ vähim täisarv, mille korral $S_0 u^j d^{N-j} \geq X$, mis on samaväärne tingimusega, et

$$\log S_0 + j \log u + (N-j) \log d \geq \log X,$$

millest järeldub, et

$$j \geq \frac{\log X - \log S_0 - N \log d}{\log u - \log d}.$$

Seega

$$a = ceil\left[\frac{\log X - \log S_0 - N \log d}{\log u - \log d}\right],$$

kus

$$ceil[x] = \begin{cases} x, & \text{kui } x \text{ on täisarv: } [x] = x, \\ [x] + 1, & \text{kui } [x] \neq x. \end{cases}$$

Nüüd saame optsiooni hinna esitada kujul

$$V_{C,0} = e^{-rT} \sum_{j=a}^{N} C_N^j q^j (1-q)^{N-j} \big(S_0 u^j d^{N-j} - X\big) =$$

$$e^{-rT} \sum_{j=a}^{N} C_N^j q^j (1-q)^{N-j} S_0 u^j d^{N-j} - X e^{-rT} \sum_{j=a}^{N} C_N^j q^j (1-q)^{N-j} =$$

$$e^{-rT} S_0 \sum_{j=a}^{N} C_N^j q^j (1-q)^{N-j} u^j d^{N-j} - X e^{-rT} \big(1 - F_{B(N,q)}(a)\big),$$

kus $F_{B(N,q)}(a) = P_{B(N,q)}(X < a) = \sum_{j=0}^{a-1} C_N^j q^j (1-q)^{N-j}$ on binoomjaotuse $B(N,q)$ jaotusfunktsioon.

Tähistame $R = e^{-r\Delta t}$. Siis $e^{-rt} = R^N$ ning suurus $e^{-rT} q^j (1-q)^{N-j} u^j d^{N-j}$ on esitatav kujul

$$e^{-rT} q^j (1-q)^{N-j} u^j d^{N-j} = R^N q^j (1-q)^{N-j} u^j d^{N-j} = \Big(\frac{qu}{R}\Big)^j \Big(\frac{(1-q)d}{R}\Big)^{N-j}.$$

Kuna

$$1-\frac{qu}{R}=1-\frac{(r-d)u}{(u-d)R}=\frac{uR-dR-Ru+du}{(u-d)R}=\frac{d(u-R)}{R(u-d)}=\frac{(1-q)d}{R},$$

siis tähistades $q'=\frac{qu}{R}$ saame

$$\begin{aligned}
&e^{-rT}S_0\sum_{j=a}^{N}C_N^j q^j(1-q)^{N-j}u^j d^{N-j}=\\
&=S_0\sum_{j=a}^{N}C_N^j\Big(\frac{qu}{R}\Big)^j\Big(1-\frac{qu}{R}\Big)^{N-j}=\\
&=S_0\sum_{j=a}^{N}C_N^j(q')^j(1-q')^{N-j}=\\
&=S_0(1-F_{B(N,q')}(a)).
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme saanud Euroopa ostuoptsiooni hinna hetkel $t=0$ kujul

$$V_{C,0}=S_0(1-F_{B(N,q')}(a))-e^{-rT}X(1-F_{B(N,q)}(a))=S_0(F_{B(N,q')}(a))-e^{-rT}X(F_{B(N,q)}(a)),$$

Analoogiliselt saab tuletada ka Euroopa müügioptsiooni hinna valemi

$$V_{P,0}=XR^{-N}F_{B(N,q)}(a)-S_0F_{B(N,q')}(a).$$

Teame, et kui perioodide arv $N\to\infty$, siis binoommeetodil leitud Euroopa optsiooni hind koondub Black-Scholes'i valemil saadud piirhinnaks, mis on antud valemitega (1.4) ja (1.7). Leisein-Reimeri meetodi idee seisneb selles, et standardiseeritud normaaljaotuse jaotusfunktsiooni argumentide $d1$ ja $d2$ põhjal leida ligikaudselt binoomjaotuse tõenäosused q ja q'. Camp-Paulson tuletas valemid binoomjaotuse lähendamiseks normaaljaotusega ning Peizer-Pratt tuletasid pöördvalemi Camp-Paulsoni valemile. Peizer-Pratt'i valem on kujul

$$h^{-1}(z)=0.5\pm\left[0.25-0.25\exp\left(-\Big(\frac{z}{n+\frac{1}{3}+\frac{0.1}{n+1}}\Big)^2\Big(n+\frac{1}{6}\Big)\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.19}$$

Peizer-Pratt'i valem on tuletatud eeldusel, et n on paaritu arv ning et binoomjaotuse jaotusfunktsiooni argument a on võrdne suurusega $\frac{n+1}{2}$. See tähendab, et Leisen-Reimer'i meetodi korral asub täitmishind sõlmede $(N, \frac{N+1}{2})$ ja $(N, \frac{N-1}{2})$ vahel. Valemi (2.19) põhjal saame leida tõenäosused

$$q = h^{-1}(d_2), \qquad q' = h^{-1}(d_1).$$

Kasutades seost $q' = \frac{qu}{R}$ saame leida parameetri u valemiga

$$u = e^{r\Delta t}\frac{q'}{q}$$

ning kasutades riskineutraalse tõenäosuse valemit $q = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}$, saame leida parameetri d valemiga

$$d = \frac{e^{r\Delta t} - qu}{1-q}.$$

3 Numbrilised eksperimendid

Selles peatükis võrdleme optsiooni hinna koonduvust nii Euroopa kui ka Ameerika tüüpi optsioonide korral. Programmid on kirjutatud programmeerimiskeeles python ning toodud lisades.

Leiame esmalt Euroopa ostuoptsiooni hinna ning hinna vead tavalist binoommeetodit ja paindlikku binoommeetodit kasutades. Kasutame artiklis toodud parameetreid:

- alusvara hind $S = 100$,
- täitmishind $X = 95$,
- riskivaba intressimäär $r = 0.06$,
- volatiilsus $\sigma = 0.2$,
- täitmisaeg $T = 0.5$ aastat,

	Binoommeetod			Paindlik binoommeetod		
Sammude arv	hind	viga	vigade suhe	hind	viga	vigade suhe
25	10.2298	0.0397	-	10.1398	-0.0503	-
50	10.2025	0.0125	3.1890	10.165	-0.0242	2.0812
100	10.1924	0.0023	5.3406	10.1782	-0.0119	2.0336
200	10.1954	0.0054	0.4366	10.1841	-0.0059	1.9933
400	10.1925	0.0024	2.2226	10.1871	-0.0029	2.0049
800	10.1898	-0.0002	-11.4132	10.1886	-0.0015	1.9974
1600	10.1904	0.0003	-0.6280	10.1893	-0.0007	1.9989
Black-Scholes	10.1901			10.1901		

Tabel 1: Euroopa ostuoptsiooni hinna leidmine binoommeetodiga ja paindliku binoommeetodiga.

Tabelis 1 tähistab vigade suhe suurust $\frac{V(N)-V_{BS}}{V(N-1)-V_{BS}}$, kus suurus $V(N)$ on sammude arvuga N leitud optsiooni hind ning suurus V_{BS} on Black-Scholesi valemi abil leitud hind. Märkame, et paindlikku binoommeetodit kasutades väheneb hinna viga monotoonselt ning vigade suhe koondub konstandiks, tavalise binoommeetodi puhul mitte. See annabki võimaluse kasutada alapeatükis 2.2 kirjeldatud ekstrapoleerimisvõtet koondumise kiirendamiseks. Leiame nüüd uuesti Euroopa ostuoptsiooni hinnad Leisen-Reimeri meetodi ning paindliku binoommeetodi abil, kus paindliku binoommeetodi koondumist on kiirendatud alapeatükis 2.2 kirjeldatud ekstrapoleerimisvõtet kasutades.

	Euroopa ostuoptsioon					
Sammude arv(N)	EFB	viga	N^2*viga	LR	viga	N^2*viga
20	10.189929	-0.000129	-0.051850	10.189767	-0.000291	-0.116750
50	10.190458	0.000400	-0.999171	10.190064	-0.000052	-0.129977
100	10.190018	-0.000039	-0.401796	10.190045	-0.000013	-0.134978
200	10.190073	0.000015	0.582367	10.190055	-0.000003	-0.138500
300	10.190043	-0.000015	-1.353519	10.190057	-0.000001	-0.139224
500	10.190060	0.000002	0.637714	10.190058	0.000000	-0.139224
1000	10.190057	-0.000001	-1.524268	10.190058	0.000000	-0.139771
1400	10.190058	-0.000000	0.094307	10.190058	0.000000	-0.139941
Black-Scholes	10.190058		10.190058		10.190058	

Tabel 2: Euroopa ostuoptsiooni hinna leidmine paindliku binoommeetodi ja Leisen-Reimer'i meetodil.

Tabeli 2 põhjal näeme, et mõlema meetodi koonduvuskiirus on suurusjärku $\frac{1}{N^2}$, kuid parema tulemuse annab Leisen-Reimeri meetod, koondudes Black-Scholesi valemi abil leitud hinnaks kuue komakoha täpsusega juba 500 sammu juures. Paindlikul binoommeetodil kulub selleks rohkem kui 1000 sammu. Samuti on näha, et Leisen-Reimer'i meetod koondub monotoonselt.

Võrdleme järgmiseks hindade koondumisi erinevate täitmishindade korral. Sammude arv olgu kõikide meetodite korral $N = 50$. Muud parameetrid jäävad samaks. Kuna Ameerika müügioptsiooni hinda ei saa analüütiliselt leida, kasutame Black-Scholes'i hinna asemel paindliku binoommeetodiga leitud hinda $N = 1000$ korral.

Täitmishind	CRR	FB	EFB	LR	Black-Scholes
Euroopa ostuoptsioon					
80	22.5481	22.5371	22.5473	22.5465	22.5464
99.9	7.1869	7.1817	7.2099	7.2099	7.2100
100	7.1276	7.1276	7.1559	7.1558	7.1559
100.1	7.0790	7.0738	7.1020	7.1020	7.1020
120	1.0974	1.0578	1.1026	1.0938	1.0938
Euroopa müügioptsioon					
80	0.1838	0.1727	0.1830	0.1821	0.1821
99.9	4.1345	4.1292	4.1575	4.1574	4.1575
100	4.1722	4.1722	4.2004	4.2004	4.2004
100.1	4.2206	4.2454	4.2436	4.2436	4.2437
120	17.5509	17.5113	17.5560	17.5473	17.5472
Ameerika müügioptsioon					
80	0.1894	0.1794	0.1894	0.1888	0.1882
99.9	4.4333	4.4309	4.4469	4.4406	4.4458
100	4.4779	4.4779	4.4939	4.4874	4.4928
100.1	4.5291	4.5252	4.5413	4.5346	4.5401
120	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0

Tabel 3: Euroopa ostuoptsiooni ning Euroopa ja Ameerika müügioptsiooni hinna leidmine.

Paneme tähele, et kui optsiooni täitmishind asub alusvara hinnast kaugel, siis Euroopa tüüpi optsioonide korral töötab paremini Leisen-Reimer'i meetod. Kui aga optsiooni täitmishind on alusvara hinna lähedal annavad paindlik binoommeetod ja Leisen-Reimer'i meetod sisuliselt võrdse tulemuse. Ameerika müügioptsiooni korral, kui täitmishind asub alusvara hinnast kaugel töötab jällegi paremini Leisen-Reimer'i meetod, kuid kui täitmishind on alusvara hinna lähedal annab parema tulemuse paindlik binoommeetod.

Viited

[1] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison. *Option pricing: Mathematical Models and Computation.* Oxford Financial Press, 1993.

[2] O.Karma, T.Raus. *Lecture notes of Models of Financial Markets.* Loengukonspekt, Tartu(2019)

[3] T.Raus. *Sissejuhatus finantsmatemaatikasse.* Loengukonspekt, Tartu(2018)

[4] Yisong "Sam"Tian. *A flexible binomial option pricing model.* The Journal of Futures Markets 19(7):817-843, October 1999

[5] D.Leisen, M.Reimer. *Binomial models for option valuation - examining and improving convergence.* Working Paper B-309, Bonn University,1995.

[6] M.Capinski, T.Zastawniak. *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering.* London: Spinger, 2003.

Lisad

Funktsioonid Euroopa ja Ameerika optsiooni hinna leidmiseks binoommeetodi, paindliku binoommeetodi, Leisen-Reimer'i meetodi ning Black-Scholes'i valemi abil

```
from math import exp, sqrt, log
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as si

def signum(x):
    if x >= 0:
        return 1
    else:
        return -1

def leiahindEuroopa(hinnad,r,delta_t,p):
    t = []
    if len(hinnad) == 1:
        return hinnad
    for i in range(len(hinnad)-1):
        hind1 = hinnad[i]
        hind2 = hinnad[i+1]
        hind = exp(-r*delta_t)*(p*hind2+(1-p)*hind1)
        t.append(hind)
    return leiahindEuroopa(t,r,delta_t,p)

def leiahindAmeerika(hinnad,r,delta_t,p,U,D,S,X,type):
    t = []
    m = len(hinnad)-2
    if len(hinnad) == 1:
        return hinnad
    for j in range(len(hinnad)-1):
        hind1 = hinnad[j]
        hind2 = hinnad[j+1]
        hind = exp(-r*delta_t)*(p*hind2+(1-p)*hind1)
```

```
        if type == "put":
            hind_Pmj = leiaOptsiooniHindHetkelN_Call(j,m,U,D,S,X)
        else:
            hind_Pmj = leiaOptsiooniHindHetkelN_Put(j,m,U,D,S,X)
        hindMax = max(hind_Pmj, hind)
        t.append(hindMax)
    return leiahindAmeerika(t,r,delta_t,p,U,D,S,X,type)

def leiaOptsiooniHindHetkelN_Call(j,N,U,D,S,X):
    hind = max((U**j*D**(N-j)*S)-X,0)
    return hind

def leiaOptsiooniHindHetkelN_Put(j,N,U,D,S,X):
    hind = max(X-(U**j*D**(N-j)*S),0)
    return hind

def leiaAlusvaraHindHetkelN_Call(j,N,U,D,S,X):
    hind = U**j*D**(N-j)*S
    return hind

def leiaHinnadHetkelN_Call(r,delta_t,p,N,U,D,S,X):
    hinnadHetkelN = []
    for j in range(N):
        V_m1j1 = leiaOptsiooniHindHetkelN_Call(j+1,N,U,D,S,X)
        V_m1j = leiaOptsiooniHindHetkelN_Call(j,N,U,D,S,X)
        V_mj = exp(-r*delta_t)*(p*V_m1j1+(1-p)*V_m1j)
        hinnadHetkelN.append(V_mj)
    return hinnadHetkelN

def leiaHinnadHetkelN_Put(r,delta_t,p,N,U,D,S,X):
    hinnadHetkelN = []
    for j in range(N):
        V_m1j1 = leiaOptsiooniHindHetkelN_Put(j+1,N,U,D,S,X)
        V_m1j = leiaOptsiooniHindHetkelN_Put(j,N,U,D,S,X)
        V_mj = exp(-r*delta_t)*(p*V_m1j1+(1-p)*V_m1j)
        hinnadHetkelN.append(V_mj)
```

```
    return hinnadHetkelN

def leiaAlusvaraHinnadHetkelN_Call(N,U,D,S,X):
    hinnadHetkelN = []
    for j in range(N):
        S_N = leiaAlusvaraHindHetkelN_Call(j+1,N,U,D,S,X)
        hinnadHetkelN.append(S_N)
    return hinnadHetkelN

def leiaSuhtelineKaugus(N,params):
    sigma = params["sigma"]
    S0=params["S0"]
    r=params["r"]
    X = params["X"]
    T= params["T"]
    optionType="euroopa_put"
    delta_t = T/N
    u = exp(sqrt(sigma**2*delta_t))
    d = 1/u
    p=(exp(r*delta_t)-d)/(u-d)
    hinnad = leiaAlusvaraHinnadHetkelN_Call(N,u,d,S0,X)
    l = []
    dd = 0
    for i in range(len(hinnad)):
        l.append(min(abs((X/hinnad[i])-1),abs((hinnad[i]/X)-1)))
    l.sort()
    for i in range(len(hinnad)-1):
        if X > hinnad[i] and X <= hinnad[i+1]:
            dd=min(hinnad[i+1]-X,X-hinnad[i])/(hinnad[i+1]-hinnad[i])
    return dd

def blackScholes(params):

    sigma = params["sigma"]
    S0=params["S0"]
    r=params["r"]
```

```
    X = params["X"]
    T= params["T"]
    optionType=params["optionType"]
    result = 0

    d1 = (np.log(S0 / X) + (r + 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma*np.sqrt(T))
    d2 = (np.log(S0 / X) + (r - 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma*np.sqrt(T))

    if optionType == 'euroopa_put':
        result=(S0*si.norm.cdf(d1, 0.0, 1.0)-X*np.exp(-r*T)*si.norm.cdf(d2,0.0,1.0))
    if optionType == 'euroopa_call':
        result=(X*np.exp(-r*T)*si.norm.cdf(-d2,0.0,1.0) - S0*si.norm.cdf(-d1,0.0,1.0))

    return result

def CRRmodel(N,params):
    sigma = params["sigma"]
    S0=params["S0"]
    r=params["r"]
    X = params["X"]
    T= params["T"]
    optionType=params["optionType"]
    delta_t = T/N
    u = exp(sqrt(sigma**2*delta_t))
    d = 1/u
    p=(exp(r*delta_t)-d)/(u-d)
    if optionType == "euroopa_put":
        hinnadHetkelN_euroopaCall = leiaHinnadHetkelN_Call(r,delta_t,p,N,u,d,S0,X)
        V_N_eo = leiahindEuroopa(hinnadHetkelN_euroopaCall,r,delta_t,p)[0]
        return V_N_eo
    elif optionType == "euroopa_call":
        hinnadHetkelN_euroopaPut = leiaHinnadHetkelN_Put(r,delta_t,p,N,u,d,S0,X)
        V_N_em = leiahindEuroopa(hinnadHetkelN_euroopaPut,r,delta_t,p)[0]
        return V_N_em
    elif optionType == "ameerika_put":
        hinnadHetkelN_ameerikaCall=leiaHinnadHetkelN_Call(r,delta_t,p,N,u,d,S0,X)
```

```
        V_N_ao=leiahindAmeerika(hinnadHetkelN_ameerikaCall,r,delta_t,p,u,d,S0,X,"put")[0]
        return V_N_ao
    elif optionType == "ameerika_call":
        hinnadHetkelN_ameerikaPut=leiaHinnadHetkelN_Put(r,delta_t,p,N,u,d,S0,X)
        V_N_am=leiahindAmeerika(hinnadHetkelN_ameerikaPut,r,delta_t,p,u,d,S0,X,"call")[0]
        return V_N_am

def flexibleCRRmodel(N,params):
    sigma = params["sigma"]
    S0=params["S0"]
    r=params["r"]
    X = params["X"]
    T= params["T"]
    optionType=params["optionType"]
    delta_t = T/N
    u0 = exp(sigma*sqrt(delta_t))
    d0 = 1/u0
    p0=(exp(r*delta_t)-d0)/(u0-d0)
    eta = (log(X/S0) - N*log(d0))/log(u0/d0)
    j0 = int(round(eta))
    l = (2*(eta-j0)*sqrt(delta_t))/(sigma*T)

    u = exp( (sigma*sqrt(delta_t)) + (l*sigma**2*delta_t) )
    d = exp( (-sigma*sqrt(delta_t)) + (l*sigma**2*delta_t) )
    p=(exp(r*delta_t)-d)/(u-d)

    if optionType == "euroopa_put":
        hinnadHetkelN_euroopaCall = leiaHinnadHetkelN_Call(r,delta_t,p,N,u,d,S0,X)
        V_N_eo = leiahindEuroopa(hinnadHetkelN_euroopaCall,r,delta_t,p)[0]
        return V_N_eo
    elif optionType == "euroopa_call":
        hinnadHetkelN_euroopaPut = leiaHinnadHetkelN_Put(r,delta_t,p,N,u,d,S0,X)
        V_N_em = leiahindEuroopa(hinnadHetkelN_euroopaPut,r,delta_t,p)[0]
        return V_N_em
    elif optionType == "ameerika_put":
        hinnadHetkelN_ameerikaCall = leiaHinnadHetkelN_Call(r,delta_t,p,N,u,d,S0,X)
```

```
        V_N_ao=leiahindAmeerikaCall(hinnadHetkelN_ameerikaCall,r,delta_t,p,u,d,S0,X,"put")[0]
        return V_N_ao
    elif optionType=="ameerika_call":
        hinnadHetkelN_ameerikaPut=leiaHinnadHetkelN_Put(r,delta_t,p,N,u,d,S0,X)
        V_N_am = leiahindAmeerika(hinnadHetkelN_ameerikaPut,r,delta_t,p,u,d,S0,X,"call")[0]
        return V_N_am

def reimerLeisenModel(N,params):
    sigma=params["sigma"]
    S0=params["S0"]
    r=params["r"]
    X=params["X"]
    T=params["T"]
    optionType=params["optionType"]
    if N % 2 == 0:
        N=N+1
    delta_t = T/N
    r_n=exp(r*delta_t)
    d1=(log(S0/X)+(r+sigma**2/2)*T)/(sigma*sqrt(T))
    d2=d1-sigma*sqrt(T)
    p=1/2 + signum(d2)*sqrt(1/4 - 0.25*exp(-(d2/(N+1/3+0.1/(N+1)))**2*(N+1/6)))
    q=1/2 + signum(d1)*sqrt(1/4 - 0.25*exp(-(d1/(N+1/3+0.1/(N+1)))**2*(N+1/6)))
    u=r_n*q/p
    d=(r_n-p*u)/(1-p)
    if optionType == "euroopa_put":
        hinnadHetkelN_euroopaCall = leiaHinnadHetkelN_Call(r,delta_t,p,N,u,d,S0,X)
        V_N_eo = leiahindEuroopa(hinnadHetkelN_euroopaCall,r,delta_t,p)[0]
        return V_N_eo
    elif optionType == "euroopa_call":
        hinnadHetkelN_euroopaPut = leiaHinnadHetkelN_Put(r,delta_t,p,N,u,d,S0,X)
        V_N_em = leiahindEuroopa(hinnadHetkelN_euroopaPut,r,delta_t,p)[0]
        return V_N_em
    elif optionType == "ameerika_put":
        hinnadHetkelN_ameerikaCall=leiaHinnadHetkelN_Call(r,delta_t,p,N,u,d,S0,X)
        V_N_ao=leiahindAmeerikaCall(hinnadHetkelN_ameerikaCall,r,delta_t,p,u,d,S0,X,"put")[0]
        return V_N_ao
```

```
    elif optionType == "ameerika_call":
        hinnadHetkelN_ameerikaPut=leiaHinnadHetkelN_Put(r,delta_t,p,N,u,d,S0,X)
        V_N_am=leiahindAmeerika(hinnadHetkelN_ameerikaPut,r,delta_t,p,u,d,S0,X,"call")[0]
        return V_N_am


def extrapolatedFlexibleCRRmodel(N,params):
    CN_eo = flexibleCRRmodel(N,params)
    C2N_eo = flexibleCRRmodel(2*N,params)

    C_black_scholes = 10.1901
    eN = CN_eo - C_black_scholes
    e2N = C2N_eo - C_black_scholes
    rooN = eN/e2N

    roo = 2
    C2N_katusega = C_black_scholes + ((roo-rooN)/(roo-1))*e2N
    return C2N_katusega

params =        {
  "sigma": 0.2, # alusvara volatiilsus (volatility)
  "S0": 100, # alusvara hind (underlying asset price)
  "r": 0.06, # riskivaba intressimaar (risk-free rate)
  "X": 95, # optsiooni taitmishind (Strike price)
  "T": 0.5, # optsiooni eluea pikkus
  "optionType": "ameerika_call" #optsiooni tuup [euroopa_put,euroopa_call,
                                             #ameerika_put,ameerika_call]
}
```

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Jaak Peterson,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Binoommeetodi koonduvuse kiirendamine optsioonide hindamisel", mille juhendaja on Toomas Raus, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Jaak Peterson
08.05.2018